

Table des matières

1	Les espaces de Lebesgue et Sobolev	2
1.1	Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$	2
1.1.1	Inégalité de Hölder	3
1.1.2	Inégalité de Minkowski	4
1.1.3	Complétude des espaces	5
1.2	Espaces de Sobolev dans \mathbb{R}^n	8
1.2.1	Dérivées aux sens des distributions	8
1.2.2	Définitions et propriétés élémentaires des espaces de Sobolev	11
1.2.3	Théorème de Meyers-Serrin	13
1.2.4	Théorème de compacité de Rellich-Kondrachov	15
1.2.5	Inégalités de Poincaré	18
2	L'opérateur de superposition	23
2.1	Propriétés de l'opérateur de superposition dans l'espace de lebesgue $L^p(\Omega)$	23
2.2	Propriétés de l'opérateurs de superposition dans $W^{1,p}(\Omega)$	28
3	Application	32
3.1	Résoudre l'équation de Hammerstein dans les espace de Lebesgue $L^P(\Omega)$	32
3.1.1	Existence et unicité des solutions	33
	Conclusion	41

Bibliographie	42
----------------------	-----------

|

INTRODUCTION

Dans ce mémoire on va traité quelques propriétés topologiques d'un opérateur qui joue un rôle très important dans plusieurs domaines, cet opérateur assigner au mathématicien russe "Nymeteskiy" qui est défini de la forme suivante: $N_f = f(x, \varphi(x))$ cet opérateur appelé aussi opérateur de superposition. on l'étudié dans les espaces fonctionnels notamment les espaces de Lebesgue et Sobolev.

Dans cet étude on utilise une technique importante et ce qu'on appelle linéarisation, à ce fait, l'utilisation cette technique pour résoudre un type très utile dans les domaines mathématiques et physiques sont les équations intégrales non linéaires de type Hammerstein

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{\Omega} k(x, y) f(y, \varphi(y)) dy$$

Notre travail est organisé en trois chapitres.

Le premier chapitre, on présente des définitions des espaces fonctionnelles: Lebesgue et Sobolev.

Le deuxième chapitre est très important car il est consacré aux propriétés de l'opérateur de superposition dans les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$ et Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$

Dans le troisième chapitre, on résout l'équation de Hammerstein dans l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ et démontrer l'existence et l'unicité de la solution de cette équation, avec la comparaison entre la solution numérique à ses équations et la solution exacte.

Chapitre 1

Les espaces de Lebesgue et Sobolev

Ce chapitre contient deux sections, la première section "L'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ " nous présentons quelques définitions et théorèmes sur les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$.

La deuxième section "L'espace de Sobolev" nous présentons quelques théorèmes nécessaires relatives aux espaces de Sobolev.

1.1 Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$

Définition 1.1.1 Soit $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty$, on appelle espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$, l'ensemble

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } \int |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

pour toute fonction $f \in L^p(\Omega)$ muni de la norme suivante:

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}$$

Définition 1.1.2 L'espace de Lebesgue $L^\infty(\Omega)$ est défini par

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } \exists C \geq 0 \text{ tel que } |f(x)| \leq C \text{ } \mu - pp\}$$

avec la norme associée

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{C \geq 0, |f(x)| \leq C \text{ } \mu - pp\}$$

1.1.1 Inégalité de Hölder

Nous allons voir maintenant une inégalité très utile : l'inégalité de Hölder

Définition 1.1.3 pour $1 < p < \infty$, l'exposant conjugué de p et le nombre $q > 1$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On notera que $p = 2 \Leftrightarrow q = 2$ (et d'ailleurs c'est le seul cas où p et q sont tous les deux entiers), $q \rightarrow +\infty \Leftrightarrow p \rightarrow 1$ et $q \rightarrow 1 \Leftrightarrow p \rightarrow +\infty$. on a $q = \frac{p}{p-1}$ et $(q-1)(p-1) = 1$

Théorème 1.1.1 (inégalité de Hölder) Soit $1 < p < \infty$, et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. alors pour toutes fonctions mesurables $f, g : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ positives, on a :

$$\int_{\Omega} fg d\mu \leq \left(\int_{\Omega} f^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_{\Omega} g^q d\mu \right)^{1/q}$$

Pour $p = 2$

$$\int_{\Omega} fg d\mu \leq \left(\int_{\Omega} f^2 d\mu \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} g^2 d\mu \right)^{1/2}$$

s'appelle **L'inégalité Cauchy-Schwartz**

Corollaire 1.1.1 pour $1 < p < \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a :

$$f \in L^p(\Omega) \text{ et } g \in L^q(\Omega) \Leftrightarrow fg \in L^1(\Omega)$$

et

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Preuve. (l'inégalité de Hölder)

1) Réductions

• Si $\|f\|_p = 0$, alors $\int_{\Omega} f^p d\mu = 0$, et comme $f \geq 0$, on a $f^p = 0$ $\mu - pp$, alors $fg = 0$ $\mu - pp$ et $\int_{\Omega} fg d\mu = 0$. L'inégalité est donc vérifiée dans ce cas.

De même, si $\|g\|_q = 0$,

On peut donc supposer $\|f\|_p > 0$ et $\|g\|_q > 0$

• L'inégalité est alors évidente si $\int_{\Omega} f^p d\mu = +\infty$ ou si $\int_{\Omega} g^q d\mu = +\infty$ (car, comme on a supposé les intégrales > 0 , le produit sera $+\infty$), on peut donc supposer qu'elles sont toutes les deux $< +\infty$ (c'est-à-dire que $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$).

• Il suffit de plus de montrer l'inégalité lorsque $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$. En effet, pour f, g arbitraires avec $0 < \|f\|_p < +\infty$ et $0 < \|g\|_q < +\infty$, si l'on pose:

$$f_1 = \frac{1}{\|f\|_p} f \text{ et } g_1 = \frac{1}{\|g\|_q} g,$$

on a $\|f_1\|_p = \|g_1\|_q = 1$ et alors:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f g d\mu &= \int_{\Omega} (\|f\|_p f_1)(\|g\|_q g_1) d\mu = \|f\|_p \|g\|_q \int_{\Omega} f_1 g_1 d\mu \\ &\leq \|f\|_p \|g\|_q \left(\int_{\Omega} f_1^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} g_1^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \|g\|_q \end{aligned}$$

2) Preuve proprement dite. On suppose donc $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$. On utilisera le lemme suivant:

Lemme 1.1.1 Si $1 < p, q < +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a pour tous nombres réels positifs $a, b \geq 0$:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Ce lemme reste vrai de façon évidente si $a = +\infty$ ou $b = +\infty$. on a donc:

$$f(x) g(x) \leq \frac{f(x)^p}{p} + \frac{g(x)^q}{q}, \forall x \in \Omega$$

Il suffit alors d'intégrer pour obtenir :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f g d\mu &\leq \int_{\Omega} \frac{f^p}{p} d\mu + \int_{\Omega} \frac{g^q}{q} d\mu = \frac{1}{p} \left(\int_{\Omega} f^p d\mu \right) + \left(\int_{\Omega} g^q d\mu \right) \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p \|g\|_q \end{aligned}$$

■

1.1.2 Inégalité de Minkowski

Théorème 1.1.2 Pour $1 \leq p < \infty$, on a pour toutes fonctions mesurables $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}

$$\left(\int_{\Omega} |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega} |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $f, g \in L^p(\Omega)$, cette inégalité s'écrit:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Preuve. Si $\int_{\Omega} |f|^p d\mu = +\infty$ ou si $\int_{\Omega} |g|^p d\mu = +\infty$, l'inégalité est évidente, on peut donc supposer que $f, g \in L^p(\Omega)$. D'autre part, on peut aussi supposer que ces deux intégrales ne sont pas nulles car sinon f ou g serait nulles μ -presque partout, et alors, $f + g$ serait égale μ -presque partout à f ou à g , et l'inégalité serait, là aussi évidente.

On écrit alors

$$\begin{aligned} \frac{f+g}{\|f\|_p \|g\|_p} &= \frac{\|f\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} \frac{f}{\|f\|_p} + \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} \frac{g}{\|g\|_p} \\ \frac{f+g}{\|f\|_p \|g\|_p} &\leq \frac{\|f\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} \frac{|f|}{\|f\|_p} + \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} \frac{|g|}{\|g\|_p} \end{aligned}$$

La fonction $x \longrightarrow x^p$ étant convexe, on a $[\alpha x + (1-\alpha)y]^p \leq \alpha x^p + (1-\alpha)y^p$ pour tous $x, y \geq 0$ et $0 \leq \alpha \leq 1$. par conséquent (en utilisant ceci avec $\alpha = \|f\|_p / (\|f\|_p + \|g\|_p)$):

$$\frac{|f+g|^p}{(\|f\|_p + \|g\|_p)^p} \leq \frac{\|f\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} \frac{|g|^p}{\|g\|_p^p}$$

En intégrant, on obtient:

$$\frac{\|f+g\|_p^p}{(\|f\|_p + \|g\|_p)^p} \leq \frac{\|f\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} \frac{\|f\|_p^p}{\|f\|_p^p} + \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} \frac{\|g\|_p^p}{\|g\|_p^p} = 1$$

ce qui est l'intégrale de Minkowski ■

1.1.3 Complétude des espaces

Théorème 1.1.3 (théorème de Riesz-fisher) Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace vectoriel normé $L^p(\Omega)$ est complet: c'est un espace de Banach

Preuve. C'est presque la même que dans le cas $p = 1$.

Soit $f_n \in L^p(\Omega)$ telles que $\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n\|_p \leq +\infty$.

Posons:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n(x)\|_p < +\infty,$$

et

$$\varphi_N(x) = \sum_{n=1}^N |f_n(x)|$$

Puisque $\|\cdot\|_p$ est une norme (inégalité de Minowski), on a :

$$\|\varphi_N\|_p \leq \sum_{n=1}^N \|f_n\|_p$$

Appliquons le lemme de Fatou (puisque $\varphi^p = \lim_{N \rightarrow +\infty} \uparrow \varphi_N^p$) :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi^p d\mu &\leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \inf \int_{\Omega} \varphi_N^p d\mu = \lim_{N \rightarrow +\infty} \inf \|\varphi_N\|_p^p \\ &\leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \inf \left(\sum_{n=1}^N \|f_n\|_p^p \right) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n\|_p^p \right) < +\infty \end{aligned}$$

Il en résulte que φ^p est μ -intégrable et donc, en particulier, que $\varphi(x)^p < +\infty$ pour μ -presque tout $x \in \Omega$. alors $\varphi(x) < +\infty$ pour μ -presque tout $x \in \Omega$.

Cela signifie que, pour ces x , la série $\sum_n f_n(x)$ est absolument convergente, A fortiori, elle converge, et l'on peut donc poser, pour ces x :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

(et $f(x) = 0$ pour les autres), Alors $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} est mesurable, et :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left| f - \sum_{n=1}^N f_n \right|^p d\mu &= \int_{\Omega} \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n \right|^p d\mu \leq \int_{\Omega} \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} |f_n| \right)^p d\mu \\ &= \int_{\Omega} (\varphi - \varphi_N)^p d\mu \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

Par le théorème de **convergence dominée** que, l'on peut utiliser car :

$$(\varphi - \varphi_N)^p \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

et

$$|(\varphi - \varphi_N)^p| = (\varphi - \varphi_N)^p \leq \varphi^p \in L^1(\Omega),$$

en utilisant le fait que $\varphi_N \geq 0$.

Cela prouve en particulier que $\int_{\Omega} \left| f - \sum_{n=1}^N f_n \right|^p d\mu < +\infty$, au moins pour N assez grand, et donc que $f - \sum_{n=1}^N f_n \in L^p(\Omega)$, ce qui entraîne que $f \in L^p(\Omega)$, Ensuite cela prouve que $\left\| f - \sum_{n=1}^N f_n \right\|_p \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$, et cela termine la preuve. ■

Cas particulier important $p=2$

Pour $f, g \in L^2(\Omega)$, on pose, dans le cas réel:

$$(f/g) = \int_{\Omega} f g d\mu,$$

et, dans le cas complexe:

$$(f/g) = \int_{\Omega} f \bar{g} d\mu$$

On pose de plus $(\dot{f}/\dot{g}) = (f/g)$.

Cela définit un **produit scalaire** sur $L^2(\Omega)$ et $\|\dot{f}\|_2 = (\dot{f}/\dot{f})$. Le théorème de Riesz-Fisher assure alors que

$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Corollaire 1.1.2 Si μ est une mesure positive bornée: $\mu(\Omega) < +\infty$, alors, on a pour $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$:

$$\|f\|_{p_1} \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \|f\|_{p_2}, \forall f \in L^{p_2}(\Omega).$$

En particulier, si $\mu(\Omega) < +\infty$:

$$1 \leq p_1 < p_2 < \infty \implies L^{p_2}(\Omega) \subseteq L^{p_1}(\Omega) \subseteq L^1(\Omega).$$

Preuve. Soit $p = p_2/p_1$, on a $p > 1$. Alors, avec $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = 1 - \frac{p_1}{p_2}$, l'inégalité de Hölder donne:

$$\begin{aligned} \|f\|_{p_1}^{p_1} &= \int_{\Omega} |f|^{p_1} d\mu = \int_{\Omega} |f|^{p_1} \prod d\mu \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |f|^{p_1 p} d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} \prod^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_{p_2}^{p_1} \mu(\Omega)^{1 - \frac{p_1}{p_2}}. \end{aligned}$$

■

Définition 1.1.4 Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, $\|\cdot\|_{L^p}$ est une norme sur $L^p(\Omega)$

Théorème 1.1.4 (Müntz) Soient $C([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} et $\alpha_n, n \geq 0$, une suite strictement croissante à valeurs positives. Alors, l'espace vectoriel

$$E = \text{vect}(f_n(x) = x^{\alpha_n}; n \geq 0)$$

est dense dans $C([0, 1], \mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_{L^2}$ si et seulement si la série de terme générale α_n^{-1} diverge.

Théorème 1.1.5 (théorème de représentation de Riesz) Soient (Ω, F, μ) un espace mesuré $1 < p < \infty, q$ l'exposant de p et $\varphi : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire. Alors il existe une unique fonction $u \in L^p(\Omega)$ telle que

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_{\Omega} u f d\mu \text{ pour tout } f \in L^p(\Omega).$$

De plus, $\|u\|_{L^q} = \|\varphi\|$

1.2 Espaces de Sobolev dans \mathbb{R}^n

1.2.1 Dérivées aux sens des distributions

Les espaces de Sobolev requièrent a quelques notions clés et techniques de la théorie des distributions de Schwartz. Sans entrer trop dans les détails, nous introduirons le concept de dérivée au sens des distributions ainsi que les espaces de distributions (au sens de Schwartz).

Définition 1.2.1 Soit Ω un domaine ouvert de \mathbb{R}^n .

Une suite $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ est dite convergente au sens de l'espaces $D(\Omega)$ vers la fonction $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ si les conditions suivantes sont satisfaites:

- (1) Il existe $K \subset\subset \Omega$ tel que $\text{supp}(\phi_n - \phi) \subset K$, pour tout naturel $n \in \mathbb{N}$
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} D^\alpha \phi_n(x) = D^\alpha \phi(x)$ uniformément sur K , pour tout multi-indice α .
- (1) Pour tout $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ il existe une distribution $T_u \in D(\Omega)^*$, le dual de l'espace fonctionnel $D(\Omega)$, définie par:

$$T_u(\phi) = \int_{\Omega} u(x) \phi(x) dx, \forall \phi \in D(\Omega)$$

En effet, il est clair, par définition et par la linéarité de l'intégral de Lebesgue, que T_u est une application linéaire. Montrons alors que T_u est continue. Pour le voir, supposons qu'il existe une suite $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers ϕ dans $D(\Omega)$. Alors, par définition, il existe $K \subset\subset \Omega$ tel que $\text{supp}(\phi_n - \phi) \subset K$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi,

$$|T_u(\phi_n) - T_u(\phi)| \leq \sup |\phi_n(x) - \phi(x)| \int_K |u(x)| dx$$

Or, vu que l'intégrale $\int_K |u(x)| dx$ est finie et que ϕ_n converge vers ϕ uniformément sur K lorsque n tend vers l'infini, le membre droite de l'inégalité précédente tend vers 0, montrant ainsi la continuité de T_u .

(2) Vu que toute fonction $\phi \in D(\Omega)$ s'annule identiquement en dehors d'un sous-ensemble compact de Ω , il est clair, grâce à une intégration par parties, que pour toute fonction $u \in C^1(\Omega)$ la relation suivante est vérifiée :

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u(x) \right) \phi(x) dx = - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \phi(x) \right) u(x) dx$$

Pour $i = 1, \dots, n$ quelconque.

De même, pour tout multi-indice α , par intégration par parties $|\alpha|$ -fois on a

$$\int_{\Omega} (D^{\alpha} u(x)) \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} (D^{\alpha} \phi(x)) u(x) dx$$

Ces résultats motivent ainsi la définition de la dérivée $D^{\alpha}T$ d'une distribution $T \in D(\Omega)^*$. On pose alors

$$D^{\alpha}T(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^{\alpha}\phi)$$

Vu que $D^{\alpha}\phi \in D(\Omega)$, pour autant que $\phi \in D(\Omega)$, $D^{\alpha}T$ est bien définie sur $D(\Omega)$. Clairement $D^{\alpha}T$ est linéaire sur $D(\Omega)$. Soient alors $\phi \in D(\Omega)$ et une suite $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D(\Omega)$ telles que $\phi_n \rightarrow \phi$ dans $D(\Omega)$. Alors,

$$\text{supp}(D^{\alpha}(\phi_n - \phi)) \subset \text{supp}(\phi_n - \phi) \subset K$$

pour un certain $K \subset\subset \Omega$. De plus, on a

$$D^{\beta}(D^{\alpha}(\phi_n - \phi)) = D^{\beta+\alpha}(\phi_n - \phi)$$

qui converge uniformément vers 0 sur K lorsque n tend vers l'infini et ceci pour tout multi-indice β . Ainsi, $D^{\alpha}\phi_n \rightarrow D^{\alpha}\phi$ dans $D(\Omega)$. Vu que $T \in D(\Omega)^*$ il en découle que

$$D^{\alpha}T(\phi_n) = (-1)^{|\alpha|} T(D^{\alpha}(\phi_n)) \rightarrow (-1)^{|\alpha|} T(D^{\alpha}(\phi)) = D^{\alpha}T(\phi)$$

montrant ainsi la continuité de $D^{\alpha}T$ et donc le fait que $D^{\alpha}T \in D(\Omega)^*$.

Ces préliminaires nous permettent ainsi de bien définir le concept de dérivées partielles au sens des distributions. Pour cela, considérons une fonction $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

En vertu des résultats précédents, il se peut qu'il existe une fonction $v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que $T_{v_\alpha} = D^\alpha(T_u)$ dans $D(\Omega)^*$. Si une telle fonction v_α existe, on peut montrer qu'elle est unique, bien entendu en dehors d'un ensemble de mesure nulle. On définit alors la dérivée partielle au sens des distributions de u de la manière suivante:

Définition 1.2.2 Soient Ω un domaine ouvert de \mathbb{R}^n , $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ et α un multi-indice quelconques. On dit que u admet une dérivée partielle au sens des distributions d'ordre α , s'il existe une fonction $v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que

$$T_{v_\alpha} = D^\alpha(T_u)$$

En d'autres termes, $v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ est la α -ième dérivée partielle au sens des distributions de u si

$$\int_{\Omega} v_\alpha(x) \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x) D^\alpha \phi(x) dx$$

et ceci pour toute fonction $\phi \in D(\Omega)$.

On note alors $D^\alpha u = v_\alpha$.

Exemple 1.2.1 Posons $n = 1$ et $\Omega =]-1, 1[$ et considérons la fonction u définie sur Ω par:

$$u(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$$

On vérifie alors assez facilement que la fonction v définie par:

$$v(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$$

correspond à la première dérivée partielle au sens des distributions de la fonction u .

Remarque 1.2.1 *On se convainc alors assez facilement, en vertu des développements précédents, que si u est suffisamment lisse pour avoir une dérivée partielle $D^\alpha u$ au sens usuel, celle-ci correspond également à la dérivée partielle au sens des distributions.*

Tous ces préliminaires nous permettent donc de définir les espaces de Sobolev.

1.2.2 Définitions et propriétés élémentaires des espaces de Sobolev

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine ouvert, $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$ et k un entier non nul.

Définition 1.2.3 *L'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ est défini par*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid \text{pour tout multi-indice } \alpha \text{ avec } |\alpha| \leq k, D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}$$

Dans cette définition la dérivée partielle D^α est entendue au sens des distributions.

Remarque 1.2.2 *Les espaces $L^p(\Omega)$ sont caractérisés par des classes de fonctions identifiées en dehors d'ensembles de mesure nulle, nous conviendrons de parler d'une fonction $u \in W^{k,p}(\Omega)$ continue, bornée, etc. s'il existe une fonction \hat{u} telle que $u = \hat{u}$.*

p.p $x \in \Omega$ et bénéficiant de telles propriétés. Dans la suite, lorsque cela deviendra utile, par exemple pour donner un sens à $u(x)$, on remplacera systématiquement u par son représentant.

On vérifie sans difficulté que l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ est un espace fonctionnel muni de la norme suivante :

Lemme 1.2.1 *la fonction $\| \cdot \|_{W^{k,p}(\Omega)} : W^{k,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$$

est une norme sur l'espace vectoriel $W^{k,p}(\Omega)$.

Lemme 1.2.2 *L'espace $W^{k,p}(\Omega)$ muni de cette norme est un espace de Banach.*

Preuve. Soit $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans l'espace fonctionnel $W^{k,p}(\Omega)$. Alors, pour tout multi-indice α d'ordre inférieur ou égal à k , la suite $\{D^\alpha u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L_p(\Omega)$. Rappelons alors que l'espace $L_p(\Omega)$ est complet et de ce fait, il existe des fonctions u et u_α pour tout multi-indice α , $0 \leq |\alpha| \leq k$, telles que $u_n, D^\alpha u_n$ convergent vers u , respectivement vers u_α dans $L^p(\Omega)$ et ceci pour tout multi-indice. De plus, vu que $L_p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$, chacune des fonctions u_n détermine une distribution $T_{u_n} \in D(\Omega)^*$. Ainsi, pour toute fonction $\phi \in D(\Omega)$, on a

$$|T_{u_n}(\phi) - T_u(\phi)| \leq \int_{\Omega} |u_n(x) - u(x)| |\phi(x)| dx \leq \|\phi\|_{L_p(\Omega)} \|u_n - u\|_{L_p(\Omega)}$$

grâce à l'inégalité de Hölder, où p' est l'exposant conjugué à p . Ainsi, $T_{u_n}(\Omega) \rightarrow T_u(\phi)$ pour toute fonction $\phi \in D(\Omega)$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Par un même raisonnement, $T_{D^\alpha u_n}(\phi) \rightarrow T_{u_\alpha}(\phi)$ pour toute fonction $\phi \in D(\Omega)$ et tout multi-indice α d'ordre compris entre 0 et k . Il en découle

$$T_{u_\alpha}(\phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{D^\alpha u_n}(\phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} T_{u_n}(D^\alpha \phi) = (-1)^{|\alpha|} T_u(D^\alpha \phi) = D^\alpha(T_u)(\phi)$$

pour toute fonction $\phi \in D(\Omega)$. Ainsi, $u_\alpha = D^\alpha u$ au sens des distributions pour tout multi-indice α vérifiant $0 \leq |\alpha| \leq k$. Finalement, vu que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0$, l'espace fonctionnel $W^{k,p}(\Omega)$ est complet. ■

Définition 1.2.4 *Etant donnés k, p, Ω , on définit l'espace de Sobolev*

$$H^{k,p}(\Omega) = \text{le complété de } \left\{ u \in C^\infty(\Omega) \mid \|u\|_{H^{k,p}(\Omega)} := \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} < \infty \right\}.$$

Pendant longtemps, jusque vers les années 60, les espaces $L^p(\Omega)$ et $W^{k,p}$ furent considérés comme distincts. Cette confusion fut rétablie grâce au théorème de Meyers-Serrin qui identifie ces deux espaces. On peut cependant déjà remarquer que la complétude de l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ nous induit l'inclusion de l'espace fonctionnel $H^{k,p}(\Omega)$ dans l'espace fonctionnel $W^{k,p}(\Omega)$. En effet, comme les dérivées distributionnelles et classiques coïncident lorsque ses dernières existent et sont continues sur Ω , l'espace

$$S = \left\{ u \in C^\infty(\Omega) \mid \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} < \infty \right\}$$

est contenu dans $W^{k,p}(\Omega)$. Ainsi, vu que l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ est complet, l'opérateur d'identité sur S s'étend en un isomorphisme isométrique entre $H^{k,p}(\Omega)$, le complété de S , et la fermeture de S dans $W^{k,p}(\Omega)$. On peut de ce fait identifier l'espace fonctionnel $H^{k,p}(\Omega)$ avec cette fermeture.

1.2.3 Théorème de Meyers-Serrin

Lemme 1.2.3 *Soit $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Alors la régularisation de u , u_ε a la propriété suivante*

$$\lim \|u_\varepsilon - u\|_{W^{k,p}(\Omega')} = 0$$

pour tout $\Omega' \subset\subset \Omega$. Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$, alors $\lim \|u_\varepsilon - u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} = 0$

Preuve. Vu que Ω' est borné, il existe ε_0 tel que $\varepsilon_0 < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Soient alors $\varepsilon < \varepsilon_0$, $x \in \Omega'$, α un multi-indice avec $|\alpha| \leq k$ arbitrairement choisis. Différentiant sous l'intégrale on trouve :

$$\begin{aligned} D^\alpha u_\varepsilon(x) &= \int_{\Omega} D_x^\alpha \rho_\varepsilon(x-y) u(y) dy \\ &= \varepsilon^{-n} \int_{\Omega} D_x^\alpha \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y) dy \\ &= (-1)^{|\alpha|} \varepsilon^{-n} \int_{\Omega} D_y^\alpha \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y) dy \\ &= \varepsilon^{-n} \int_{\Omega} \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) D_y^\alpha u(y) dy \\ &= \int_{\Omega} \rho_\varepsilon(x-y) D_y^\alpha u(y) dy \\ &= (D^\alpha u)_\varepsilon(x) \end{aligned}$$

■

Par le lemme précédant, on observe que pour toute fonction $u \in W^{k,p}(\Omega)$, il existe une suite de fonction $\{u_\varepsilon\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ convergente vers u dans $W^{k,p}(\Omega)$ quelque soit Ω' de fermeture compacte dans Ω .

Théorème 1.2.1 (*Meyers-Serrin*)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert quelconque. Alors

$$H^{k,p}(\Omega) = W^{k,p}(\Omega)$$

Preuve. Pour $i = 1, 2, \dots$ définissons Ω_i le sous-domaine de Ω par :

$$\Omega_i = \{x \in \Omega \mid |x| < i \text{ et } \text{dist}(x, \partial\Omega) > 1/i\}$$

et posons $\Omega_{-1} = \Omega_0 = \emptyset$. On remarque que pour $i = 1, 2, \dots$ on a $\Omega_i \subset \subset \Omega_{i+1}$ et de plus $\cup_{i=1}^\infty \Omega_i = \Omega$. Considérons alors la famille ϑ de sous-domaines de Ω définie par :

$$\vartheta = \{U_i \mid U_i = \Omega_{i+1} \setminus \overline{\Omega}_{i+1}, i = 1, 2, \dots\}$$

Soit alors F une partition de l'unité subordonnée à la famille ϑ . Posons

$$F_i = \{f \in F \mid \text{supp } f \subset U_i\}$$

$$f_i = \sum_{f \in F_i} f$$

Vu que Ω_{i+1} est compacte, on a que F_i est un ensemble fini et par suite $f_i \in C_0^\infty(U_i)$ et $\sum_{i=1}^\infty f_i \equiv 1$ sur Ω . Soient alors $\varepsilon > 0$ et $u \in W^{k,p}(\Omega)$ arbitrairement choisis. Si $0 < \varepsilon < 1/(k+1)(k+2)$, alors le support de la régularisation $(f_i u)_\varepsilon$ est contenu dans l'intersection $V_i = \Omega_{i+2} \cap (\Omega_{i-2})^c$, sous-ensemble d'adhérence compacte dans Ω . Ainsi, vu que $f_i u \in W^{k,p}(\Omega)$ quel que soit $i = 1, 2, \dots$ on peut choisir ε_i tel que

$$\|(f_i u)_{\varepsilon_i} - f_i u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \|(f_i u)_{\varepsilon_i} - f_i u\|_{W^{k,p}(V_i)} < \frac{\varepsilon}{2^i}$$

Posant alors $v_i \equiv (f_i u)_{\varepsilon_i}$, on remarque qu'uniquement un nombre fini des fonctions v_i ne s'annule pas sur $\Omega' \subset \subset \Omega$ arbitraire. De ce fait, la fonction $v \equiv \sum_{i=1}^\infty v_i$ est bien défini et appartient à $C^\infty(\Omega)$, et le fait Choisissons $x \in \Omega_i$ quelconque, on a

$$u(x) = \sum_{j=1}^{i+2} f_j(x) u(x)$$

d'où

$$\|u - v\|_{W^{k,p}(\Omega_i)} \leq \sum_{j=1}^{i+2} \left\| (f_j u)_{\varepsilon_j} - f_j u \right\|_{W^{k,p}(\Omega)} < \varepsilon \sum_{j=1}^{i+2} 2^{-j} < \varepsilon$$

Laissant i tendre vers l'infini, on obtient le résultat. ■

1.2.4 Théorème de compacité de Rellich-Kondrachov

rappelons quelques définitions et résultats essentielles.

Définition 1.2.5 Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $A \subset X$ un sous-ensemble.

(1) On dit que A est compact dans X si pour toute suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$, existe une sous-suite $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge dans X et dont la limite $a \in \bar{A}$.

(2) A est dit précompact si \bar{A} est compact.

Définition 1.2.6 Soient X, Y deux espaces normés, $L : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire. Alors

(1) L est dit compact si $L(A)$ est précompacte dans Y , pour toute partie bornée $A \subset X$.

(2) L est dit complètement continue si il est continu et compact. On notera alors $X \rightarrow Y$.

Théorème 1.2.2 (Ascoli-Arzelà)

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné, $K \subset C^0(\bar{\Omega})$. Alors K est précompact si les conditions suivantes sont satisfaites :

(1) existe une constante M telle que pour toute fonction $u \in K$ et tout point $x \in \Omega$

$$|u(x)| \leq M$$

(2) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, pour tout $x, y \in \Omega$ avec $|x - y| < \delta$, on a $|u(x) - u(y)| < \varepsilon$.

Corollaire 1.2.1 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine ouvert borné, m un entier non négatif, $0 < v < \lambda \leq 1$ deux réels. Alors

$$C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) \rightarrow C^m(\overline{\Omega})$$

$$C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) \rightarrow C^{m,v}(\overline{\Omega}) \quad (\text{s})$$

Preuve. Soit F un sous-ensemble borné dans $C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$. Alors, il existe M telle que $\|u\|_{C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})} \leq M$, pour toute fonction $u \in F$. D'où $|u(x) - u(y)| \leq M|x - y|$, pour toute fonction $u \in F$, et tout $x, y \in \Omega$, F est précompact dans $C^0(\overline{\Omega})$.

Si $m \geq 1$, tout sous-ensemble borné dans $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$. L'est également dans $C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$. Par les considérations précédents, il existe une suite, $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset F$ convergent vers u dans $C^0(\overline{\Omega})$. De plus, la suite $\{D_1 u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ est borné dans $C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$. Il existe donc une sous-suite de la suite $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, que l'on notera également $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $D_1 u_i \rightarrow \psi_1$ dans $C^0(\overline{\Omega})$. La convergence dans $C^0(\overline{\Omega})$ étant une convergence uniforme sur Ω , on a $\psi_1 = D_1 u$. Réitérant ce procédé, on peut extraire une sous-suite, toujours noté $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, telle que $D^\alpha u_i \rightarrow D^\alpha u$ dans $C^0(\overline{\Omega})$ pour tout multi-indice α vérifiant $0 \leq |\alpha| \leq m$. On a donc prouvé la compacité de manière générale. ■

Pour^(*), on procède comme suit :

$$\frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x - y|^v} = \left(\frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x - y|^\lambda} \right)^{v/\lambda} |D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^{1-v/\lambda} \leq C |D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^{1-v/\lambda} \quad (\text{ss})$$

Pour toute fonction u dans un sous-ensemble borné de $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$. Ainsi l'inégalité^(**) nous dit toute suite bornée dans $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$. Ainsi, la compacité de^(*).

Théorème 1.2.3 (Riesz-Fréchet-Kolmogorov)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine ouvert et soit F un sous-ensemble borné de $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Pour toute fonction $u \in F$ on note \tilde{u} son extension par 0 en dehors de Ω . Supposons satisfaites les hypothèses suivantes :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ et un sous-domaine $\omega \subset\subset \Omega$ tels que

(1)

$$\left(\int_{\Omega} |\tilde{u}(x+h) - \tilde{u}(x)|^p dx \right)^{1/p} < \varepsilon$$

pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ avec $|h| < \delta$ et pour toute fonction $u \in F$.

(2) $\|u\|_{L^p(\Omega/\bar{\omega})} < \varepsilon$, pour toute fonction $u \in F$. Alors F est précompact dans $L^p(\Omega)$.

Théorème 1.2.4 (Rellich-Kondrachov)

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine ouvert borné, k un entier naturel, j, m deux entiers non négatifs, $1 \leq p \leq \infty$ un réel. Alors

(1) Si $kp < n$

(a)

$$W_0^{j+k,p}(\Omega) \rightarrow W_0^{j,k}(\Omega), \forall q \in \left[1, \frac{np}{n-kp}\right)$$

(2) Si $kp = n$

(b)

$$W_0^{j+k,p}(\Omega) \rightarrow W_0^{j,k}(\Omega), \forall q \in [1, \infty)$$

(3) Si $kp > n$

(*) Si $kp > n > (k-1)p$

(c)

$$W_0^{j+k,p}(\Omega) \rightarrow C^{j,v}(\bar{\Omega}), \forall v \in \left(0, k - \frac{n}{p}\right)$$

En particulier

(d)

$$W_0^{j+k,p}(\Omega) \rightarrow C^j(\bar{\Omega})$$

(**) Si $kp > n$ (de manière générale)

(e)

$$W_0^{k,p}(\Omega) \rightarrow C^m(\bar{\Omega}), \forall 0 \leq m < k - \frac{n}{p}$$

(f)

$$W_0^{j+k,p}(\Omega) \rightarrow W_0^{j,q}(\Omega), \forall q \in [1, \infty]$$

1.2.5 Inégalités de Poincaré

Théorème 1.2.5 (*Inégalité de Poincaré*)

Soient $1 \leq p < \infty$ et Ω un domaine de mesure finie. Alors, il existe une constante $C = C(p)$ telle que pour toute fonction $u \in C_0^\infty(\Omega)$ on a

(E)

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

Preuve. Soient $u \in C_0^\infty(\Omega)$ et $1 \leq p < \infty$ quelconques. Soit p' l'exposant conjugué de p au sens de Hölder. Sans perte de généralité, supposons que le domaine Ω est contenu entre les hyperplans $x_n = 0$ et $x_n = c > 0$. On étend u par 0 en dehors de Ω . Notons alors $x = (x', x_n)$ avec $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Vu que u est à support compact dans Ω

$$u(x) = \int_0^{x_n} D_n u(x', t) dt$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p(\Omega)}^p &= \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} |u(x', x_n)|^p dx_n \right) dx' \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |u(x', x_n)|^p dx_n &= \int_0^c |u(x', x_n)|^p dx_n \\ &= \int_0^c \left| \int_0^{x_n} D_n u(x', t) dt \right|^p dx_n \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{x_n} D_n u(x', t) dt \right|^p &\leq \left(\int_0^{x_n} |D_n u(x', t)| dt \right)^p \\ &= \|D_n u\|_{L^1([0, x_n])}^p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \|D_n u\|_{L^p([0, x_n])}^p \|1\|_{L^{p'}([0, x_n])}^p \\ &\leq \left(\int_0^c |D_n u(x', t)|^p dt \right) x_n^{p-1} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |u(x', t)|^p dx_n &\leq \int_0^c \left(\int_0^c |D_n u(x', t)|^p dt \right) dx' \\ &= \frac{c^p}{p} \int_0^c |D_n u(x', t)|^p dx' \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p(\Omega)}^p &\leq \frac{c^p}{p} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^c |D_n u(x', t)|^p dt \right) dx' \\ &= \frac{c^p}{p} \int_{\mathbb{R}^n} |D_n u(x)|^p dx \\ &= \frac{c^p}{p} \|D_n u\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \end{aligned}$$

L'inégalité précédente nous permet de conclure que ■

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \frac{c}{p^{1/p}} \sum_{i=1}^n \|D_i u\|_{L^p(\Omega)}$$

Achevant de ce fait la preuve de ce théorème.

Remarque 1.2.3 *Il est évident que cette inégalité ne peut être généralisée aux espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer les fonctions constantes sur Ω borné (ou de mesure finie).*

Nous allons maintenant tirer un corollaire de l'inégalité de Poincaré, définissons pour cela la fonction $|\cdot|_{W^{k,p}(\Omega)}$ de la manière suivante :

Définition 1.2.7 Soit $u \in W^{k,p}(\Omega)$ quelconque, on pose

(F)

$$|u|_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$$

En vertu de la remarque précédente, il est clair que la fonction $|\cdot|_{W^{k,p}(\Omega)}$ ne peut être une norme sur l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$. Nous allons cependant montrer qu'elle l'est sur l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, pour autant que le domaine Ω soit de mesure finie.

Corollaire 1.2.2 Si Ω est de mesure finie, la fonction $|\cdot|_{W^{k,p}(\Omega)}$ est une norme sur l'espace de Sobolev $W_0^{k,p}(\Omega)$ équivalente à la norme standard $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$.

Preuve. Nous allons démontrer ce corollaire par induction sur k . Remarquons en premier lieu que si $u \in C_0^\infty(\Omega)$, toutes ces dérivées appartiennent également à l'espace de fonctions $C_0^\infty(\Omega)$. De plus, par définition, il est clair que l'inégalité suivante est toujours vérifiée :

$$|u|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

Il nous suffit de montrer qu'il existe une constante K vérifiant :

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq K |u|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

quel que soit $u \in W^{k,p}(\Omega)$.

(1) Supposons $k = 1$

Appliquant l'inégalité de Poincaré, on trouve :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = |u|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}$$

$$\leq |u|_{W^{1,p}(\Omega)} + C |u|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

$$= (1 + C) |u|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

On pose alors $K = (1 + C)$

(2) Soit $k \geq 2$ et supposons le résultat vrai pour tout $1 \leq l \leq k-1$, à savoir qu'il existe une K_l vérifiant

$$\|u\|_{W^{l,p}(\Omega)} \leq K_l |u|_{W^{l,p}(\Omega)}$$

pour tout $u \in W_0^{l,p}(\Omega)$. On a

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \|u\|_{W^{k-1,p}(\Omega)} + |u|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

$$\leq K_l |u|_{W^{k-l,p}(\Omega)} + |u|_{W^{kp}(\Omega)}$$

Or, pour tout multi-indice α d'ordre $k-1$, par l'inégalité de Poincaré, on a

$$\|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} = C \sum_{i=1}^n \|D_i D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |u|_{W^{k-l,p}(\Omega)} &\leq C \sum_{i=1}^n \sum_{|\alpha|=k} \|D_i D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \\ &= C \sum_{i=1}^n \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq nC |u|_{W^{kp}(\Omega)} \end{aligned}$$

Et finalement, combinant nos différentes inégalités, on obtient

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq (1 + nCK_l) |u|_{W^{kp}(\Omega)}$$

Pour ce qui est de l'inégalité (A), elle peut se généraliser comme suit : ■

Théorème 1.2.6 (*Inégalité de Poincaré-Wirtinger*)

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine ouvert convexe. $p > n$ un réel. Alors, pour toute fonction $u \in W^{l,p}(\Omega)$ et pour toute partie mesurable $B \subset \Omega$ de mesure non nulle, posons

$$u_B = \frac{1}{|B|} \int_B u(y) dy$$

Alors

$$\|u - u_B\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{\omega_n^{1-1/n}}{|B|} |\Omega|^{1/n} (\text{diam}\Omega)^n \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

En particulier, l'inégalité reste valable si l'on prend $B = \Omega$.

Pour la preuve de ce théorème, nous utiliserons les lemmes suivants, qui utilisent des résultats concernant la théorie des potentiels.

Lemme 1.2.4 *Soient $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un domaine ouvert convexe, $u \in W^{1,1}(\Omega)$ quelconque et $B \subseteq \Omega$ une partie mesurable de mesure non nulle. Alors, pour presque tout $x \in \Omega$, on a*

$$|u(x) - u_B| \leq (\text{diam}\Omega)^n \frac{1}{|B|} V_{\frac{1}{n}}(|Du|)$$

Preuve. (Inégalité de Poincaré-Wirtinger)

Par le lemme

$$|u(x) - u_B| \leq (\text{diam}\Omega)^n \frac{1}{|B|} V_{\frac{1}{n}}(|Du|)$$

avec $p=q$ par conséquent $\delta = 0, \mu = 1/n$

$$\left\| V_{\frac{1}{n}}(|Du|) \right\|_{L^p(\Omega)} \leq n\omega^{1-\frac{1}{n}} |\Omega|^{\frac{1}{n}} \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

Combinant les deux inégalités, on trouve bien le résultat cherché. ■

Chapitre 2

L'opérateur de superposition

Dans ce chapitre ,nous présentons quelques propriétés topologiques de l'opérateur de superposition dans les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$ et Sobolev

Définition 2.0.8 Soit la fonction $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on dit que f est satisfaite la condition de Carathéodeory, si

- (i) La fonction $x \rightarrow f(x, y)$ mesurable dans l'ensemble Ω , pour $y \in \mathbb{R}$,
- (ii) la fonction $y \rightarrow f(x, y)$ est continu dans \mathbb{R} , pour $x \in \Omega$.

Définition 2.0.9 Soit la fonction $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, satisfaite la condition de Carathéodeory alors pour chaque fonction $x(s)$ étant mesurable sur l'ensemble Ω , nous définissons l'opérateur F de superposition comme

$$(Fx) s = f(s, x(s)) \quad , s \in \Omega$$

l'opérateur F s'appelle aussi l'opérateur de Nemytskij.

2.1 Propriétés de l'opérateur de superposition dans l'espace de lebesgue $L^p(\Omega)$

Théorème 2.1.1 L'opérateur de superposition F est généré par l'application f de L_p dans L_q si seulement si il existe une fonction $a \in L_q$ et des constantes $b \geq 0, \delta > 0$ tels que

$$|f(s, u)| \leq a(s) + b|u|^{p/q} \quad (2.1.1)$$

pour tous les $(s, q) \in \Omega \times \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda(s) \leq \delta \mu(s) |u|^p \leq \delta^p. \quad (2.1.2)$$

Preuve. Pour la preuve voir [1]. ■

Théorème 2.1.2 Si F une application de L_p dans L_q , alors F est localement borné si et seulement si la fonction $f(s, \cdot)$ est borné pour chacun $s \in \Omega_d$.

Preuve. Pour la preuve voir [1] ■

Théorème 2.1.3 Si F une application de L_p dans L_q , alors F est borné sur les ensembles bornés si et seulement si pour chacun $r > 0$ il existe une fonction $a_r \in L_1$ et une constante $b_r \geq 0$ tels que

$$|f(s, u)|^q \leq a_r(s) + b_r |u|^p$$

soutient pour tous les $(s, u) \in \Omega \times \mathbb{R}$ tels que

$$\mu(s) |u|^p \leq r^p$$

D'ailleurs, l'évaluation suivante

$$\mu_F(r) \leq \nu_f(r) \leq \|F\theta\|_q + 3\mu_F(r) \quad (2.1.3)$$

se tient par

$$\mu_F(r) = \mu(F, b_r) = \sup_{\|x\| \leq r} \|Fx\| \text{ et } \nu_f(r) = \inf \{\|a_r\|_1 + b_r r^p\}.$$

Preuve. Pour la preuve voir [1]. ■

Théorème 2.1.4 Soit f une fonction admissible, et supposer que l'opérateur de superposition F est généré par l'application f dans l'espace L_1 , alors la fonction de growth

$$\mu_F(r) = \mu(F, B_r) = \sup_{\|x\| \leq r} \|Fx\|$$

de F est donnée par

$$\begin{cases} \mu_F(r) = \|F\omega_r\|_1 \text{ if } r < r_*, \\ \lim_{r \rightarrow 0} \mu_F(r) = \|F\omega_r\|_1 \text{ if } r \geq r_*, \end{cases} \quad (2.1.4)$$

la ou $\omega_r \in W_r$, arbitraire. D'ailleurs, l'égalité

$$\mu_F(r) = v_F(r) \quad (2.1.5)$$

se tient où

$$v_F(r) = \inf\{\|a\|_1 + b_r : |f(u, s)| \leq a(s) \leq +b|u|\}. \quad (2.1.6)$$

Preuve. Pour la preuve voir [1]. ■

Théorème 2.1.5 Soit f une fonction sup-mesurable et supposer que l'opérateur de superposition F est généré par l'application f dans l'espace L_1 , où la mesure fondamentale μ est atomique. Soit \tilde{f} l'opérateur admissible majorant de f , et \tilde{F} l'opérateur de superposition généré par \tilde{f} dans L_1 . Avec

$$\mu_{\tilde{F}}(r) = \mu_F(r)$$

et

$$v_{\tilde{f}}(r) = v_f(r),$$

par conséquent, le théorème se tient.

Preuve. Pour la preuve voir [1]. ■

Théorème 2.1.6 Soit f une fonction sup-mesurable, et supposer que l'opérateur de superposition F est généré par l'application f de L_p dans L_q . alors les trois conditions suivantes sont équivalentes:

Corollaire 2.1.1 (a) F est absolument borné,

(b) pour chacun $r > 0$ il existe une fonction monotoniquement croissante Φ_r dessus $[0, \infty)$ tels que Φ est une fonction croissante non négative sur $[0, \infty)$ tels que $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u)}{u} = \infty$ prise, et l'opérateur de superposition \tilde{F}_r est généré par par la fonction

$$\tilde{f}_r(s, u) = u_0(s) \Phi_r[|F(s, u) u| u_0(s)^{-1}]$$

(avec u_0 une unité arbitraire dans L_q) est borné sur la boule $B_r(L_p)$.

(c) Pour chacun $r > 0$ et $\epsilon > 0$ un peuvent trouver une fonction $a_\epsilon \in L_1$ tels que

$$|f(s, u)|^q \leq a_\epsilon(s) + \epsilon |u|^p (\mu(s) |u|^p \leq r^p) \quad (2.1.7)$$

Preuve. Pour la preuve voir [1]. ■

Théorème 2.1.7 Soit f une fonction sup-mesurable, et supposer que l'opérateur de superposition F est généré par l'application f de L_p dans L_q , alors F est continu si et seulement si f est sup-équivalent à une certaine fonction de Carathéodory.

Preuve. Pour la preuve voir [1]. ■

Théorème 2.1.8 Soit f une fonction sup-mesurable, et supposer que l'opérateur de superposition F est généré par l'application f de L_p dans L_q . Alors F est uniformément continu dessus ensembles borné si et seulement si pour chacun $\epsilon > 0$ et $r > 0$ un peut trouver $b_\epsilon \geq 0$, $\delta > 0$ et $a_\epsilon \in L_q$ avec $\|a_\epsilon\|_q \leq \epsilon$ tels que

$$|f(s, u) - f(s, v)| \leq a_\epsilon(s) + \epsilon \left(|u|^{p/q} + |v|^{p/q} \right) + b_\epsilon |u - v|^{p/q}$$

se tient pour

$$\mu(s) |u|^p \leq r^p, \mu(s) |v|^p \leq r^p \text{ et } \mu(s) |u - v|^p \leq \delta^p.$$

D'ailleurs, l'évaluation suivante:

$$w_F(r, \delta) \leq v_f(r, \delta) \leq (1 + 2^{1+1/q}) w_F(r, \delta) \quad (2.1.8)$$

se tient, par $w_F(r, \delta)$ où est définie

$$w_F(r, \delta) = \{ \|Fx_1 - Fx_2\| : \|x_1\| \leq r, \|x_2\| \leq r, \|x_1 - x_2\| \leq \delta \}$$

et $v_f(r, \delta)$,

$$v_f(r, \delta) = \inf \left\{ \|a_\epsilon\|_q + 2\epsilon r^{p/q} + b_\epsilon \delta^{p/q} \right\}$$

Preuve. Pour la preuve voir [1]. ■

Théorème 2.1.9 Soit f une fonction sup-mesurable, et supposer que l'opérateur de superposition F est généré par l'application f de L_p dans L_q . Est F alors faiblement continu si et seulement si la restriction de $\Omega_c \times \mathbb{R}$ satisfait

$$f(s, u) \simeq a(s) + b(s)u \quad (s \in \Omega_c, u \in \mathbb{R}), \quad (2.1.9)$$

avec $a \in L_q$ et $b \in L_q/L_p$, et la restriction de f à $\Omega_d \times \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory.

Preuve. Pour la preuve voir [1]. ■

Théorème 2.1.10 *Soit f est une fonction de Carathéodory, et supposer que l'opérateur de superposition F est généré par l'application f de L_p dans L_q . Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *L'opérateur F satisfait une condition de Lipchitz*

$$\|Fx_1 - Fx_2\| \leq r, \|x_1 - x_2\| \in B_r(L_p). \quad (2.1.10)$$

(b) *Donné deux fonction x_1 et x_2 , on peut trouver une fonction $\zeta \in B_{k(r)}(L_q/L_p)$ tels que*

$$Fx_1(s) - Fx_2(s) = \zeta(s)[x_1(s) - x_2(s)]$$

(c) *La fonction f satisfait une condition de Lipchitz*

$$|f(s, u) - f(s, v)| \leq g(s, w) |u - v| \quad (|u|, |v| \leq w), \quad (2.1.11)$$

où la fonction g produit d'un opérateur de superposition G qui applique la boule $B_r(L_p)$ dans la boule $B_{k(r)}(L_q/L_p)$. D'ailleurs, dans le cas $p = q$ ($p < q$, respectivement) la fonction g dans (2.1.11) est essentiellement est lié (identiquement zéro, respectivement). En conclusion, dans le cas $p > q$, chacun les conditions ci-dessus est équivalente à les suivantes :

(d) *Pour chacun $\lambda > 0$, il existe une fonction $a_\lambda \in L_1$ tels que $c(\rho) = \sup \|a_\lambda\| < \infty$ ($\rho > 0$) et*

$$|f(s, u) - f(s, v)|^q \leq \lambda^{-q} a_\lambda(s) + \lambda^{p-q} |u - v|^p. \quad (2.1.12)$$

l'état de Darbo

$$\alpha_N(FN) \leq k(r) \alpha_p(N) \quad (N \subseteq B_r(L_p)),$$

où α_p dénote la mesure de non compacité $\alpha(N) = \inf\{r : r > 0, N \subseteq B_r(X + c), c \text{ finite}\}$ dans l'espace L_p . Puisque l'espace de Lebesgue L_q est α non généré pour $1 \leq q \leq \infty$.

Preuve. Pour la preuve voir [1]. ■

Théorème 2.1.11 *Soit f une fonction de Carathéodory, et supposer que l'opérateur de superposition F est généré par l'application f de L_p dans L_q . Puis l'état de Lipchitz (2.1.10) et l'état de Darbo*

$$\alpha_q(FN) \leq k(r)\alpha_p(N)(N \subseteq B_r(L_P))$$

sont équivalent.

Preuve. Pour la preuve voir [1]. ■

2.2 Propriétés de l'opérateurs de superposition dans $W^{1,p}(\Omega)$

Les propriétés de l'opérateurs de superposition dans les espaces de Sobolev sont notablement différentes de leurs propriétés dans les espaces de Lebesgue.

Dans ce qui suit, est un ouvert quelconque de \mathbb{R}^d , sans propriété spéciale de régularité, sauf mention du contraire. On commence par définir les ensembles de niveau d'une fonction localement intégrable. Dans le cas d'une fonction continue, l'ensemble de niveau c est simplement défini par $u^{-1}(\{c\})$. La difficulté dans le cas L^1_{loc} est que l'on a affaire non pas à une seule fonction, mais à une classe d'équivalence de fonctions modulo l'égalité presque partout. On ne peut donc pas utiliser une définition utilisant une image réciproque, puisque celle-ci dépend du choix du représentant de la classe u . Il faut procéder de façon détournée.

Définition 2.2.1 *Soit $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ et $c \in \mathbb{R}$. On pose*

$$E_c(u) = \{x \in \Omega : \frac{1}{mes B(x, \rho)} \int_{B(x, \rho)} |u(y) - c| dy \rightarrow 0 \text{ quand } \rho \rightarrow 0\}. \quad (2.2.1)$$

Définition 2.2.2 *L'ensemble $E_c(u)$ étant défini à partir de quantités intégrales, il ne dépend que de la classe d'équivalence de u et non pas de tel ou tel représentant de cette classe.*

Proposition 2.2.1 *Soit u_1 est une fonction mesurable représentant la classe d'équivalence $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, alors $u_1(x) = c$ presque partout sur $E_c(u)$ et $u_1(x) = c$ presque partout sur $\Omega \setminus E_c(u)$.*

Remarque 2.2.1 *L'ensemble $E_c(u)$ est donc un ensemble de niveau défini de façon raisonnable pour une fonction localement intégrable. Dans le cas où u est continue, c'est-à-dire quand il existe un représentant continu et que l'on choisit ce dernier, alors on vérifie aisément que $E_c(u) = u^{-1}(\{c\})$.*

Nous allons montrer simultanément deux résultats importants concernant les opérateurs de superposition dans $W^{1,p}(\Omega)$. Le premier d'entre eux est une propriété des fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 2.2.1 *Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Alors, pour tout $c \in \mathbb{R}$, $\nabla u = 0$ presque partout sur $E_c(u)$.*

Remarque 2.2.2 *i) Notons tout d'abord que ce résultat peut sembler contradictoire, puisqu'il a l'air d'impliquer que ∇u est nul presque partout. Naturellement il n'en est rien car même si l'on avait $\Omega = \cup_{c \in \mathbb{R}} E_c(u)$, l'ensemble \mathbb{R} n'est pas dénombrable et une mesure n'est que dénombrablement additive. La réunion non dénombrable d'ensembles de mesure nulle où ∇u ne s'annule pas, n'a aucune raison d'être de mesure nulle et est évidemment bien de mesure strictement positive en général.*

positive en général.

De plus, si $\text{mes} E_c(u) = 0$, alors l'énoncé est correct, mais vide. Or il s'agit de la situation générique par rapport à c . Donnons en un exemple : soit $\Omega =]-2, 2[$ et $u(x) = x + 1$ si $-2 \leq x < -1$, $u(x) = 0$ si $-1 \leq x < 1$ et $u(x) = x - 1$ si $1 \leq x \leq 2$ (on choisit évidemment le représentant continu dans ce cas). On vérifie aisément que $u \in H_1(\Omega)$ avec $u(x) = 1$ si $-2 < x < -1$ ou $1 < x < 2$, et $u(x) = 0$ si $-1 < x < 1$. Donc, si $c = 0$, $E_c(u)$ est soit vide, soit réduit à un point, donc de mesure nulle, et $E_0(u) = [-1, 1]$, ensemble sur lequel u est presque partout nul.

ii) Il faut faire attention au fait que même pour une fonction de $W^{1,p}(\Omega)$, la définition des ensembles de niveau $E_c(u)$ ne va pas de soi. Ainsi, si en dimension d'espace 1, les fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$ sont continues, dès que la dimension d'espace est supérieure à 2, il existe des fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$ qui ne sont localement bornées nulle part. Dans ce cas, il n'est pas évident de choisir un représentant adéquat vis-à-vis des ensembles de niveau. Une définition ne faisant intervenir que la classe d'équivalence modulo l'égalité presque partout s'impose alors..

Le deuxième résultat concerne les opérateurs de superposition proprement dits, mais n'est pas indépendant du premier. Il s'agit d'une version d'un théorème de Stampacchia.

Théorème 2.2.2 *Soit T une fonction globalement lipschitzienne de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , de classe C^1 par morceaux et n'ayant qu'un nombre fini de points de non dérivabilité c_1, c_2, \dots, c_k . Si $\text{mes}\Omega = +\infty$, on suppose en outre que $T(0) = 0$. Alors pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$,*

- i) $T(u) \in W^{1,p}(\Omega)$,*
- ii) $\nabla(T(u)) = T(u)\nabla u$ sur $\Omega \setminus \cup_{i=1}^k E_{c_i}(u)$ et $\nabla(T(u)) = 0$ presque partout sur $\cup_{i=1}^k E_{c_i}(u)$.*

Remarque 2.2.3 *i) Dans la suite, à la place de la description du gradient fournie par le Théorème précédent, nous écrirons plus rapidement $\nabla(T(u)) = T'(u)\nabla u$ presque partout, avec la convention que là où $T'(u)$ n'est pas défini, c'est-à-dire sur $\cup_{i=1}^k E_{c_i}(u)$, le produit vaut 0 puisque $\nabla u = 0$ presque partout cet ensemble.*

ii) Si $\text{mes} = +\infty$ mais $T(0) = 0$, alors $T(u) \in L^p(\Omega)$, mais on a néanmoins $T(u) \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ et $\nabla(T(u)) \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$.

iii) Il n'est pas nécessaire de supposer que T soit de classe C^1 par morceaux avec un nombre fini de points de non dérivabilité. Le résultat subsiste encore pour T globalement lipschitzienne, i.e., $T(u) \in W^{1,p}(\Omega)$, ce qui n'est pas très difficile à montrer en procédant par approximations comme dans la démonstration qui suit. Par contre, écrire une formule qui donne le gradient est plus délicat et nous ne le ferons pas ici. Il faut en particulier utiliser le fait que $\nabla u = 0$ presque partout sur l'image réciproque par u de tout ensemble de mesure nulle.

Nous allons décomposer la démonstration de ces deux théorèmes en une série par approximations successives. On commence par traiter le cas où la fonction T est régulière.

Lemme 2.2.1 *Soit $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 , globalement lipschitzienne (avec $S(0) = 0$ si $\text{mes} = +\infty$). Alors si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, on a $S(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ et $\nabla(S(u)) = S'(u)\nabla u$.*

Lemme 2.2.2 *Soit T une fonction globalement lipschitzienne de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , de classe C^1 par morceaux et n'ayant qu'un nombre fini de points de non dérivabilité $c_1 < c_2 < \dots < c_k$. Alors,*

il existe S de classe C^1 et des fonctions T_i affines par morceaux, de classe C^1 sauf en c_i , telles que

$$T = S + \sum_{i=1}^k T_i.$$

En ce qui concerne les propriétés de continuité des opérateurs de superposition dans $W^{1,p}(\Omega)$, la situation diffère sensiblement du cas $L^p(\Omega)$.

Théorème 2.2.3 *Si $u \in L^p(\Omega)$, alors $T_k(u) \rightarrow u$ dans $L^p(\Omega)$ fortement quand $k \rightarrow +\infty$. Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alors $T_k(u) \rightarrow u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ fort.*

Preuve. Commençons par le cas L^p , $p < +\infty$. Nous avons

$$\begin{aligned} \|u - T_k(u)\|_{L^p(\Omega)}^p &= \int_{\{u < -k\}} |u + k|^p dx + \int_{\{u > -k\}} |u - k|^p dx \\ &\leq \int_{\{u < -k\}} |u|^p dx + \int_{\{u > k\}} |u|^p dx \\ &= \int_{\Omega} |u|^p 1_{|u| > k} dx \rightarrow 0. \end{aligned}$$

quand $k \rightarrow +\infty$ par convergence monotone. Pour ce qui concerne les gradients, si u est dans $H^1(\Omega)$, on a de façon similaire

$$\|\nabla u - \nabla(T_k(u))\|_{p(\Omega)}^p = \int_{\Omega} |1 - T'_k(u)|^p |\nabla u|^p dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^p 1_{|u| > k} dx \rightarrow 0,$$

quand $k \rightarrow +\infty$.

Enfin, quand $p = +\infty$, $T_k(u) = u$ dès que $k \geq \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$. ■

Remarque 2.2.4 *i) Dans tous les cas, on a $T_k(u) \in L^\infty(\Omega)$ et $\|T_k(u)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq k$.*

ii) Si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ alors $T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ puisque $T_k(0) = 0$.

Chapitre 3

Application

Dans ce chapitre nous discuterons sur l'objectif de notre article dont on prouve l'existence de la solution d'une équation intégrale non linéaire de type Hammerstein en utilisant la technique de la composition dans les espaces de Lebesgue et on montre l'efficacité de ce résultat par des exemples numériques.

3.1 Résoudre l'équation de Hammerstein dans les espace de Lebesgue $L^P(\Omega)$

Définition 3.1.1 *Dans tout ce qui suit Ω désigné un ensemble mesurable de l'espace euclidien.*

L'objet présent est l'étude de l'équation

$$u(x) = \int_{\Omega} k(x, y) f(y, u(y)) dy \quad (3.1.1)$$

avec x, y désignant des variables indépendantes. L'équation plus générale

$$\varphi(x) = g(x) + \int_{\Omega} k(x, y) f(y, \varphi(y)) dy \quad (3.1.2)$$

dans laquelle $g(x)$ est une fonction connue, se ramène à l'équation (3.1.1) par la substitution

$$u(x) = \varphi(y) - g(y), \quad (3.1.3)$$

cette équation a été par M.M. Hammerstein.

Théorème 3.1.1 Soit $S = \{u(x)\}$ un ensemble des fonctions dans l'espace hilbertien, si l'on a pour $u \in s$

$$(i) \int_{\Omega} \int_{\Omega} k^2(x, y) dx dy \leq L^2.$$

$$(ii) \sup f^2(x, u(x)) < D(x).$$

(iii) $f(x, u(x))$ est continue en u , alors l'opérateur

$$Au = k(x, y)f(y, u)dy \quad (3.1.4)$$

est continue sur S dans l'espace hilbertien, où L est une constante et $D(x)$ est une fonction sommable.

3.1.1 Existence et unicité des solutions

Dans cette section on donne quelques théorème d'existence et unicité des solutions des équations intégrables non-linéaires, on s'intéresse aux équation de type Hammerstein.

Théorème 3.1.2 L'équation (3.1.1) admet une solution, si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$(i) \int_{\Omega} \int_{\Omega} k^2(x, y) dx dy \leq C_1,$$

$$(ii) f^2(x, u(x)) \leq C(x) \text{ pour } \int_{\Omega} u^2(x) dx < K.$$

$$(iii) f(x, u) \text{ est continue en } u \text{ pour } \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx < K.$$

$$(iv) C_1 C_2 < K \text{ où } C_2 = \int_{\Omega} C(x) dx.$$

Preuve. Considérons L l'ensemble des fonctions mesurables $u(x)$, telle que

$$L = \{u(x); \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx < K\}.$$

l'ensemble L est convexe et fermé dans l'espace hilbertien, en vertu de théorème (3.1.1), l'opérateur

$$Au(x) = \int_{\Omega} k(x, y) f(y, u) dy$$

est compact et continue dans l'espace hilbertien.

L'opérateur est évidemment mesurable, puis nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} A^2 u(x) dx &\leq \int_{\Omega} \left[\int_{\Omega} k(x, y) f(y, u(y)) dy \right]^2 dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega} k^2(x, y) dx dy \cdot \int_{\Omega} f^2(y, u(y)) dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_1 C_2 < K. \end{aligned}$$

D'après le théorème de Schauder, il existe dans l'ensemble des fonctions $\{u(x) < k\}$ une fonction $u(x)$ pour laquelle, on a

$$u(x) = \int_{\Omega} k(x, y) f(y, u) dy,$$

cette fonction est la solution cherchée. ■

Théorème 3.1.3 *L'équation (3.1.1) admet une solution unique, si l'on a :*

- (i) $\int_{\Omega} \int_{\Omega} k^2(x, y) dx dy < C_1$,
- (ii) $\int_{\Omega} f^2(y, u(y)) dy < C_2$, pour u tel que $u(x)^2 dy < k$,
- (iii) $\int_{\Omega} [f(x, u_1) - f(x, u_2)]^2 dx \leq L \int_{\Omega} |u_1 - u_2|^2 dx$, pour u tel que $\int_{\Omega} u^2(x) dx \leq k$,
- (iv) $C_1 L = q < 1$,
- (v) $C_1 C_2 < k$.

Preuve. De la même manière du théorème précédent, on voit que l'existence de la solution sera démontrée.

Si nous prouverons que l'ensemble $S = \{u(x)\}$ des fonctions $u(x)$ pour laquelle

$$\int_{\Omega} u^2(x) dx \leq k,$$

la sphère $S(0, k)$, se transforme en sous-ensemble, nous avons

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} [Au_1(x) - A_n u_2(x)]^2 dx &\leq \int_{\Omega} \left[\int_{\Omega} k(x, y) f(y, u_1) - f(y, u_2) dy \right]^2 dx \\
 &\leq \int_{\Omega} \int_{\Omega} k^2(x, y) dx dy \int_{\Omega} [f(y, u_1) - f(y, u_2)]^2 dy \\
 &\leq C_1 L \int_{\Omega} (u_1 - u_2)^2 dy, \\
 &\leq q \int_{\Omega} (u_1 - u_2)^2 dy, \text{ avec } q < 1,
 \end{aligned}$$

de plus cette solution est unique en vertu du principe de Cacciopoli. ■

Théorème 3.1.4 *On suppose que les fonctions $k(x, y)$ et $f(y, \varphi(y))$ vérifiant les conditions suivantes :*

(A1) Le noyau $k(x, y)$ est mesurable sur $[a, b] \times [a, b]$ et tel que

$$\left(\int_a^a |k(x, y)|^\sigma dx \right)^{\frac{1}{\sigma}} \leq M_1, \text{ pour tout } y \in [a, b],$$

où $\sigma < p$ et $\sigma, p > 1$.

(A2) Le noyau $k(x, y)$ est mesurable sur $[a, b] \times [a, b]$ et tel que

$$\left(\int_a^a |k(x, y)|^{\frac{p-\sigma}{p-1}} dy \right)^{\frac{p-1}{p-\sigma}} \leq M_2, \text{ pour tout } x \in [a, b].$$

(A3) La fonction non linéaire $f(y, \varphi(y))$ de $[a, b] \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} satisfait la condition de Carathéodory et telle que

$$|f(y, \varphi(y))| \leq a_0(y) + b_0 |\varphi(y)|^{\frac{p}{q}},$$

où $a_0(y) \in L^q([a, b], \mathbb{R})$, $b_0 > 0$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Sous les conditions **(A1)**, **(A2)** et **(A3)** l'opérateur

$$A\varphi(x) = \int_a^b k(x, y) f(y, \varphi(y)) dt, \tag{3.1.5}$$

est de L^p dans L^p .

Preuve. D'après la condition **(A3)**, on peut écrire

$$|f(y, \varphi(y))|^q \leq \left(a_0(y) + b_0 |\varphi(y)|^{\frac{p}{q}} \right)^q,$$

donc

$$\|f(y, \varphi(y))\|_q = \left(\int_b^a |f(y, \varphi(y))|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_b^a \left(|a_0(y)| + b_0 |\varphi(y)|^{\frac{p}{q}} \right)^q dy \right)^{\frac{1}{q}}.$$

en utilisant l'inégalité de Minkovski, on a

$$\begin{aligned} \|f(y, \varphi(y))\|_q &\leq c \left(\left(\int_b^a |a_0(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_b^a b_0^q |\varphi(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\ &\leq c \left(\|a_0(y)\|_q + b_0 \|\varphi(t)\|_p^{\frac{p}{q}} \right). \end{aligned}$$

Par conséquent l'opérateur $f(y, \varphi(y))$ est un élément continu de $L^p([a, b], \mathbb{R})$.

Dans l'espace $L^p([a, b], \mathbb{R})$ on considère

$$A\varphi(x) = \int_a^b k(x, y) f(y, \varphi(y)) dy,$$

on obtient

$$\begin{aligned} |A\varphi(x)| &= \left| \int_a^b k(x, y) f(y, \varphi(y)) dy \right|, \\ &\leq \int_a^b |k(x, y) f(y, \varphi(y))| dy, \\ &= \int_a^b (|k(x, y)|^\sigma |f(y, \varphi(y))|^q)^{\frac{1}{p}} |k(x, y)|^{1-\frac{\sigma}{p}} |f(y, \varphi(y))|^{1-\frac{q}{p}} dy, \\ &\leq \left(\int_a^b |k(x, y)|^\sigma |f(y, \varphi(y))|^q dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |k(x, y)|^{p-\sigma} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |f(y, \varphi(y))|^q dy \right)^{\frac{p-q}{pq}}, \\ |A\varphi(x)| &\leq M_2^{\frac{(p-\sigma)}{p}} \|f(y, \varphi(y))\|^{\frac{(p-\sigma)}{p}} \left(\int_a^b |k(x, y)|^\sigma |f(y, \varphi(y))|^q dy \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
 |A\varphi(x)|^p &\leq \left(M_2^{\frac{(p-\sigma)}{p}} \|f(y, \varphi(y))\|^{\frac{(p-\sigma)}{p}} \left(\int_a^b |k(x, y)|^\sigma |f(y, \varphi(y))|^q dy \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p, \\
 \left(\int_a^b |A\varphi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &\leq M_2^{\frac{(p-\sigma)}{p}} \|f(y, \varphi(y))\|^{\frac{(p-\sigma)}{p}} \left(\int_a^b \int_a^b |k(x, y)|^\sigma |f(y, \varphi(y))|^q dy dx \right)^{\frac{1}{p}}, \\
 &\leq M_2^{\frac{(p-\sigma)}{p}} \|f(y, \varphi(y))\|^{1-\frac{q}{p}} \left(\int_a^b |k(x, y)|^\sigma dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\left(\int_a^b |f(y, \varphi(y))|^q dy \right)^{\frac{1}{p}} \right), \\
 &\leq M_2^{\frac{(p-\sigma)}{p}} \|f(y, \varphi(y))\|^{1-\frac{q}{p}} M_1^{\frac{\sigma}{p}} \|f(y, \varphi(y))\|^{\frac{q}{p}}, \\
 \|A\varphi(x)\|_p &\leq M_2^{\frac{(p-\sigma)}{p}} M_1^{\frac{\sigma}{p}} \|f(y, \varphi(y))\|_q.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, l'opérateur $A\varphi(x)$ est bien défini de L^p vers L^p par l'interpolation. ■

On considère l'équation intégrale suivante :

$$\varphi(x) = \int_a^b k(x, y) f(y, \varphi(y)) dy,$$

Nous avons savoir quelles sont les conditions exiger dessus sur $k(x, y)$ et $f(y, \varphi(y))$ pour que cette équation admet une solution $\varphi(y) \in L^p([a, b])$.

Théorème 3.1.5 *On suppose que les fonctions $k(x, y)$ et $f(y, \varphi(y))$ vérifiant les conditions suivantes :*

(B1) Le noyau $k(x, y)$ appartient à l'espace L^p pour tout $x \in [a, b]$

$$\left(\int_a^b |k(x, y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \leq N_1(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

(B2) La fonction $f(y, \varphi(y))$ appartient à l'espace L^p pour tout $x \in [a, b]$

$$\left(\int_a^b |f(y, \varphi(y))|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} \leq C.$$

et satisfaite la condition de Lipchitz

$$|f(y, \varphi_1(y)) - f(y, \varphi_2(y))| \leq L(y) |\varphi_1(y) - \varphi_2(y)|,$$

avec la fonction $L(y)$ appartient à l'espace $L^{\frac{pq}{p-q}}$ avec $q \leq p$,

$$\left(\int_a^b |L(y)|^{\frac{pq}{p-q}} dy \right)^{\frac{pq}{p-q}} \leq N_2.$$

Sous les assumptions **(B1)** et **(B2)**, l'approximation successive

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_a^b k(x, y) f(y, \varphi_n(y)) dy,$$

converge presque partout à la solution de l'équation (3.1.1) vérifier

$$N_2^p \int_a^b N_1^p(y) dy = N^p < 1.$$

Preuve. Pour cette méthode, on pose $\varphi_0(y)$ comme fonction identiquement nulle et successivement

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_a^b k(x, y) f(y, \varphi_n(y)) dy, \quad n = 0, 1, 2, \dots, n, \dots,$$

donc, on obtient

$$\begin{aligned} |\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| &\leq \int_a^b |k(x, y)| |f(y, \varphi_n(y)) - f(y, \varphi_{n-1}(y))| dy \\ &\leq \int_a^b |k(x, y)| |L(y)| |\varphi_n(y) - \varphi_{n-1}(y)| dy \\ &\leq \left(\int_a^b |k(x, y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |L(y)|^{\frac{pq}{p-q}} dy \right)^{\frac{pq}{p-q}} \left(\int_a^b |\varphi_n(y) - \varphi_{n-1}(y)| dy \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)|^p \leq N_1^p(x) N_2^p \int_a^b |\varphi_{n+1}(y) - \varphi_n(y)|^p dy, \quad (3.1.6)$$

utilisant la condition $\varphi_0(y) = 0$, on obtient

$$|\varphi_1(x)|^p \leq N_1^p(x) \left(\int_a^b |f(x, 0)|^q dy \right)^{\frac{p}{q}} = N_1^p(x) C^p,$$

et par (3.1.6) elle vient

$$\begin{aligned} |\varphi_2(x) - \varphi_1(x)|^p &\leq N_1^p(x) N_2^p \int_a^b N_1^p(x) C^p dx = C^p N^p N_1^p(x) \\ |\varphi_3(x) - \varphi_2(x)|^p &\leq N_1^p(x) N_2^p \int_a^b C^p N_1^p(x) N^p dx = C^p N^{2p} N_1^p(x), \end{aligned}$$

plus généralement

$$|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)|^p \leq C^p N^{2np} N_1^p(x),$$

et d'après la simplification

$$|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| \leq C^p N^{2n} N_1(x).$$

Cette expression donne la suite suivante $\varphi_n(x)$ et on exprime par la série

$$\varphi_1(x) + (\varphi_2(x) - \varphi_1(x)) + \cdots + (\varphi_p(x) - \varphi_{p-1}(x)) + \cdots,$$

majorant par

$$\varphi N_1(x) (1 + N + N^2 + \cdots + N^{p-1} + \cdots)$$

Naturellement cette série est convergence, et par conséquent la suite $\varphi_n(x)$ converge vers la solution de l'équation (3.1.1). ■

Implémentations numériques

Dans cette section on donne certains exemples numériques pour résoudre l'équation de Hammerstein, où la fonction φ représente la solution exacte et $\tilde{\varphi}$ représente la solution approchée.

Exemple 3.1.1 On considère l'équation intégrale de Hammerstein

$$10\varphi(x) + \int_0^1 \exp(t^4 + x^4)(\varphi(t))^3 dt = 10x - \frac{1}{4}(e - 1) \exp(x^4),$$

où la solution exacte est $\varphi(t) = t$.

t	<i>Solution exacte</i>	<i>Solution appro</i>	<i>Erreur</i>	<i>Erreur[10]</i>
0.000000	0.000000e + 000	2.209477e - 005	2.209477e - 005	2.1462e - 003
0.250000	2.500000e - 001	2.500222e - 001	2.500225e - 005	2.1546e - 003
0.500000	5.000000e - 001	5.000235e - 001	2.351976e - 005	2.2846e - 003
0.750000	7.500000e - 001	7.500303e - 001	3.031818e - 005	2.9450e - 003
1.000000	1.000000e + 000	1.000060e + 000	6.005982e - 005	2.8340e - 003

Tableau 1. Comparaison entre la solution exacte, approchée et l'erreur [10]

Exemple 3.1.2 On considère l'équation intégrale de Hammerstein

$$2\varphi(x) - \int_0^1 \sin(\exp(t) + x) \exp(\varphi(t)) dt = 20x + \cos(\exp(1) + x) - \cos(1 + x),$$

avec la solution exacte est $\varphi(t) = t$.

t	<i>Solution exacte</i>	<i>Solution appro</i>	<i>Erreur</i>	<i>Erreur[10]</i>
0.000000	0.000000e + 000	-3.184043e - 006	3.184043e - 006	1.6361e - 005
0.250000	2.500000e - 001	2.499964e - 001	3.602525e - 006	4.3978e - 005
0.500000	5.000000e - 001	4.99964e - 001	3.797019e - 006	6.8861e - 005
0.750000	7.500000e - 001	7.499962e - 001	3.755433e - 006	8.9462e - 005
1.000000	1.000000e + 000	9.999965e - 001	3.480352e - 006	1.0450e - 004

Tableau 2. Comparaison entre la solution exacte, approchée et l'erreur [10]

Exemple 3.1.3 On considère l'équation intégrale de Hammerstein

$$\varphi(x) - \int_0^1 tx(\varphi(t))^3 dt = \frac{1}{x^2+1} - \frac{3}{16}x,$$

où la solution exacte est $\varphi(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

t	<i>Solution exacte</i>	<i>Solution appro</i>	<i>Erreur</i>	<i>Erreur[55]</i>
0.000000	1.000000e + 000	1.000000e + 000	0.000000e + 000	0.000000e + 000
0.200000	9.615385e - 001	9.615348e - 001	3.642846e - 005	1.154620e - 004
0.400000	8.620690e - 001	8.620617e - 001	7.285693e - 006	2.389660e - 004
0.600000	7.352941e - 001	7.352832e - 001	1.092854e - 005	3.581180e - 004
0.800000	6.097561e - 001	6.097415e - 001	1.457139e - 005	4.780980e - 004

Tableau 3. Comparaison entre la solution exacte, approchée et l'erreur [10]

Exemple 3.1.4 On considère l'équation intégrale de Hammerstein

$$\varphi(x) - \int_0^1 \sin(t+x) \ln(\varphi(t)) dt = \exp(x) - 0.382 \sin(x) - 0.301 \cos(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

où la solution exacte est $\varphi(t) = \exp(x)$.

t	<i>Solution exacte</i>	<i>Solution appro</i>	<i>Erreur</i>	<i>Erreur[10]</i>
0.000000	1.000000e + 000	1.000195e + 000	e - 004	0.000000e + 000
0.200000	1.221403e + 000	1.221559e + 000	e - 004	1.940000e - 004
0.400000	1.491825e + 000	1.491937e + 000	e - 004	5.410000e - 004
0.600000	1.822119e + 000	1.822181e + 000	e - 005	3.360000e - 004
0.800000	2.225541e + 000	2.225552e + 000	e - 005	2.890000e - 004

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié les propriétés topologiques de l'opérateur de superposition dans les espaces fonctionnels notamment l'espace de Lebesgue et de Sobolev qui est défini de la forme suivante :

$$[F(x)s] = f[s, x(s)] \quad , s \in \Omega \quad ((1))$$

Où Ω un ensemble mesurable.

Cette étude a une intérêt dans le domaine des équations intégrales non linéaires, particulièrement les équations de type Hammerstien, de cette forme :

$$H\varphi(x) = \int_{\Omega} k(x, y) f(y, \varphi(y)) dy. \quad ((2))$$

Alors pour montrer que l'équation (2) admet une solution, on utilise la décomposition de Nemytskij pour dit que l'opérateur H de Hammerstien est contractant d'où admet un point fixé qui est représenté la solution et pour démontrer que cette équation a une solution unique, on utilise la technique d'approximation successive.

Bibliographie

- [1] J.APPEL and P.P.ZABREIKO, Non linear superposition operators, spring 1989.
- [2] L.DIENING, Maximal function on generalized Lebesgue space $L^p(\Omega)$, Math Inequal.App, Vol 7(2004).
- [3] L.LAUNDRY, Les espaces de Sobolev été 2005.
- [4] D.LI Meseur et integration, université d'Artois.Jul 8.2010.
- [5] J.GARNIER et V.PIERRIER, Equation aux dérivées partielles elliptiques non linéaires.
- [6] M.NADIR, B.GAGUI,A numerical approximation for solution of Hammerstein integral équation in L^p espace, Sao Paul Journal of Mathematical Scieces vol 8(2014).
- [7] P.P.ZABREIKO and J.I.PUSTYL'INK, on the continuity and complete continuity of nonlinear integral operators in L^p spaces, Usephi Mat. Vol 19(1982).